Objectif du chapitre: Pour une fonction f donnée, on souhaite trouver r tel que

$$f(r) = 0$$

On dira qu'un tel r est **une racine** de la fonction f.

- On travaillera avec des fonctions f continues,
- Dans certains cas, il est facile de trouver analytiquement les racines. Pour des fonctions polynomiales, il existe par exemple des formules pour des degrés ≤ 4. Mais rien pour les degrés supérieurs et les fonctions quelconques,
- On cherche une méthode systématique, s'appuyant le moins possible sur les particularités de la fonction f.

Ce chapitre s'attache à construire des méthodes permettant de trouver les racines d'une fonction quelconque.

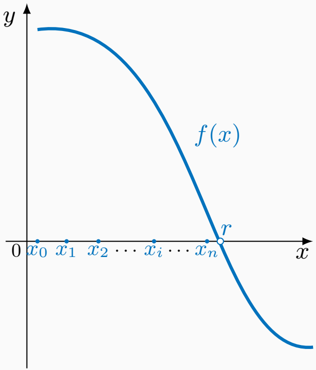
Un peu de jargon pour commencer...

Définition (Méthode itérative)

Une méthode itérative est une méthode dans laquelle on applique de manière répétitive (en boucle) certaines opérations algorithmiques. Une méthode itérative se compose en général de **donnée(s) initiale(s)** et de **critère(s) d'arrêt(s)**.

- Une méthode itérative procède par **itérations**, une itération correspondant à un passage dans la boucle,
- Le critère d'arrêt est une condition vérifiée à chaque itération permettant l'arrêt ou non de la méthode,
- Une méthode itérative va générer une suite d'approximation $x_0, x_1, ..., x_n$, on parle aussi d'itérés, on va avoir une approximation par itération,
- Une méthode itérative s'oppose à une méthode directe, résolvant le problème en une seule étape,

- Une méthode itérative est convergente si la suite d'approximation converge ($\lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0$),
- Une méthode itérative est divergente si la suite d'approximation ne converge pas (la limite est infinie ou n'existe pas, ex: $x_n = (-1)^n$).



Critère d'arrêt, comment le choisir ? Dans un monde idéal on arrêterait lorsque

$$|x_n - r| = 0.$$

La probabilité que cela arrive est voisine de 0, notamment à cause des erreurs de représentation, troncature,...

Quelques critères d'arrêts usuels:

- Critères de convergence : critères définissant une solution acceptable

$$|x_{n+1} - x_n| \leq TOL, \quad \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| \leq TOL, \quad |f(x_n)| \leq TOL$$

- Critères de divergence : critères définissant une instabilité, l'impossibilité d'atteindre une solution acceptable

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| \geq TOL, \quad \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}\right| \geq TOL, \quad n \geq n_{max}$$

  Les tolérances TOL et le nombre maximal d'itération n_{max} sont des **paramètres utilisateur**. Ils sont à ajuster suivant la précision souhaitée sur l'approximation.

Méthode de la bissection (méthode de dichotomie):

Repose sur l'observation suivante : de part et d'autre d'une racine, une fonction continue f va changer de signe et passer du positif au négatif ou vice-versa. Cela inspire la méthode suivante

- Choisir un intervalle de départ $[x_1, x_2]$ où la fonction f possède un changement de signe, c'est-à-dire où $f(x_1) \times f(x_2) < 0$
- Approximer la racine par le point milieu $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$,
- Choisir entre $[x_1, x_m]$ et $[x_m, x_2]$ l'intervalle qui possède encore un changement de signe. Recommencer la deuxième étape avec ce nouvel intervalle

L'idée est donc de réduire la longueur de l'intervalle contenant la racine par deux à chaque itération, d'où le nom de la méthode.

Algorithme de la bissection, pseudo-code `script_bissection.m`

Données : Une fonction f continue et un intervalle $[x_1, x_2]$ **contenant un changement de signe** de f, *i.e* $\boldsymbol{f(x_1) \times f(x_2) < 0}$. Une tolérance d'arrêt $\boldsymbol{\varepsilon_a}$, un nombre max d'itérations $\boldsymbol{n_{max}}$, la précision machine $\boldsymbol{\varepsilon_m}$.

Résultat : La variable x_m qui contiendra une approximation de la racine r.

$x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$;
tant que $\frac{|x_2-x_1|}{2|x_m|+\varepsilon_m} > \varepsilon_a$ *et* $n \leq n_{max}$ **faire**
    si $f(x_1) \times f(x_m) < 0$ **alors**
        $x_2 = x_m$
    sinon
        si $f(x_m) \times f(x_2) < 0$ **alors**
            $x_1 = x_m$
        fin
    fin
    $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$; $n = n + 1$;
fin

- Pourquoi le critère d'arrêt suivant ?

$$\frac{|x_2 - x_1|}{2|x_m| + \varepsilon_m} \leq \varepsilon_a$$

$\rightarrow$ À chaque étape, la racine r se trouve soit dans l'intervalle $[x_1, x_m]$ ou $[x_m, x_2]$, tous deux de longueur $\frac{x_2 - x_1}{2}$, et donc

$$\Delta r = |r - x_m| < \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Autrement dit, $\frac{|x_2 - x_1|}{2|x_m|}$ est une approximation de l'erreur relative.

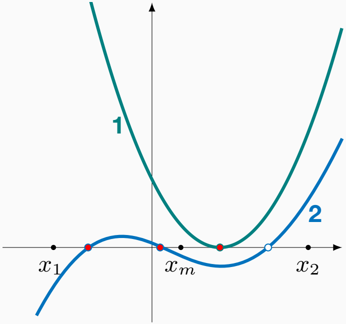
- Et pourquoi ajoute t'on ε_m, la précision machine, au dénominateur ?

$\rightarrow$ Pour éviter la division par 0 ! En effet, il y a le risque que x_m devienne 0 au cours des itérations (0 machine).

Est-ce que cela fonctionne tout le temps ? **Non !** Soit $I = [x_1, x_2]$ l'intervalle de départ

1 Si la fonction $f(x)$ est tangente à l'axe des x, elle ne présente pas de changement de signe.

2 Si la fonction $f(x)$ admet un nombre pair (ou impair) de racine dans l'intervalle I, alors on va «rater» des racines.



$\rightarrow$ Le choix de l'intervalle de départ est crucial !

Il est possible de connaître à l'avance le nombre d'itérations pour garantir que l'erreur absolue Δr soit inférieure à une quantité E donnée.

Soit $L = x_2 - x_1$, longueur de l'intervalle de départ.
Longueur de l'intervalle après une itération : $\frac{L}{2}$.
Longueur de l'intervalle après n itérations : $\frac{L}{2^n}$, et donc, après n itérations

$$\Delta r < \frac{L}{2^n}$$

Ainsi, pour garantir que l'erreur absolue soit inférieure à E donnée, il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{L}{2^n} \leq E \Leftrightarrow \ln\left(\frac{L}{E}\right) \leq n\ln(2) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(L) - \ln(E)}{\ln(2)}$$

n étant un entier on prend l'entier le plus petit vérifiant la dernière inégalité.

Remarque(s)

La majoration de l'erreur absolue dépend uniquement de l'itération et de la longueur de l'intervalle de départ, mais pas de la fonction f !

Avantage de la bissection :

- Fiable, converge dés qu'il y a changement de signe de la fonction.

Désavantages de la bissection :

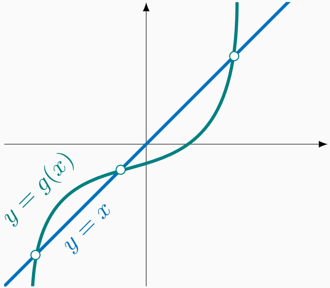
- Converge lentement,
- Exige une connaissance *a priori* de la position des racines.

Les méthodes que nous allons voir par la suite :

- Ne nécessiteront pas la connaissance d'un intervalle I où la fonction change de signe,
- Seront plus rapide,
- Mais la convergence ne sera plus assurée à 100%.

Définition (Point fixe)

Soit g une fonction à valeur réelle. Un point r tel que $\boldsymbol{g(r) = r}$ est appelé point fixe de la fonction g.



Graphiquement, un point fixe de g est un point où la fonction g intersecte la droite d'équation $y = x$.

Il y a un lien étroit entre racine et point fixe. En effet, si r est une racine de la fonction f, alors r est un point fixe des fonctions suivantes

$$g_-(x) = x - f(x) \rightarrow \; g_-(r) = r - f(r) = r$$
$$g_+(x) = x + f(x) \rightarrow \; g_+(r) = r + f(r) = r$$

Réciproquement, si r est un point fixe de g, alors

$$r - g(r) = 0,$$

r est donc une racine de la fonction $f(x) = x - g(x)$.

$\rightarrow$ **La recherche d'un point fixe est similaire à la recherche d'une racine.**

Le problème qui nous intéresse principalement est $f(r) = 0$. Mais partant de f, il est possible de construire une grande variété de fonctions de points fixes g.

La logique sera la suivante:

$f \rightarrow$ «fabrication» fonction point fixe $g \rightarrow$ application de la méthodes des points fixes à g pour trouver r tel que $g(r) = r \iff f(r) = 0$.

Voyons à présent en quoi consiste la méthode des points fixes.

Méthode du point fixe:

- Point initial x_0 donné,
- Faire pour $n \geq 0$: $\boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)}$.

Algorithme du point fixe, pseudo-code `script_points_fixes.m`

Données :

- Une fonction g continue et un point de départ x_0
- Une tolérance d'arrêt ε_a et un nombre max d'itérations n_{max}
- la précision machine ε_m.

Résultat : la variable x_n qui contiendra une approximation du point fixe r

tant que $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|+\varepsilon_m} > \varepsilon_a$ *et* $n \leq n_{max}$ **faire**

  $x_{n+1} = g(x_n)$;

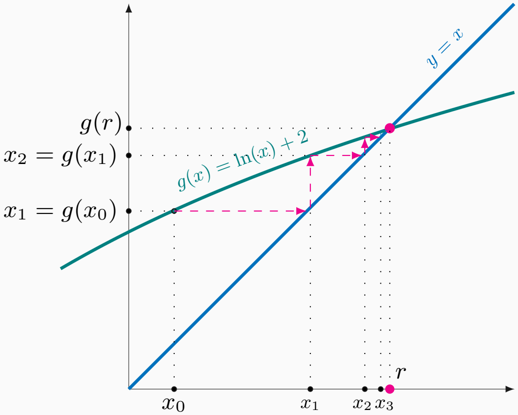
  $n = n + 1$;

fin

Méthode du point fixe:

- Point initial x_0 donné,
- Faire pour $n \geq 0$: $\boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)}$.

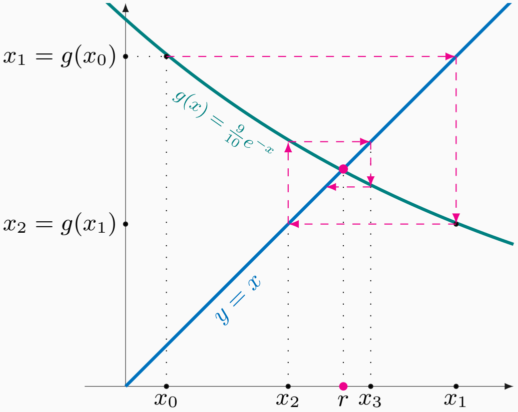
Exemple 1: $g(x) = \ln(x) + 2$



Méthode du point fixe:

- Point initial x_0 donné,
- Faire pour $n \geq 0$: $\boldsymbol{x_{n+1} = g(x_n)}$.

Exemple 2: $g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$



Quand la méthode fonctionne-t-elle ? *i.e* sous quelles conditions a t-on

$$x_n \to\ r = g(r)$$

Soit r un point fixe de g. L'erreur à l'itération n est définie par

$$e_n = x_n - r$$

Et dire que $x_n \to\ r = g(r)$ revient à dire que $e_n \to\ 0$.

Pour que cela se produise, l'erreur doit donc diminuer d'itérations en itérations. Or l'erreur à l'itération $n+1$ est définie par

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - r = g(x_n) - g(r)$$

Mais on peut également écrire $x_n = r + \underbrace{x_n - r}_{e_n} = r + e_n$, et on a ainsi

$$e_{n+1} = g(r + e_n) - g(r)$$

Effectuons un développement de Taylor de la fonction g autour de r (pour e_n petit).

$$g(r+e_n) = g(r) + g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + ...$$

Ainsi,

$$e_{n+1} = g(r+e_n) - g(r) = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + ...$$

Si l'on néglige les termes de degré supérieur à 2 en e_n, on obtient

$$\boldsymbol{e_{n+1} \approx g'(r)e_n} \approx g'(r)^2 e_{n-1} \approx ... \approx g'(r)^{n+1}e_0 = g'(r)^{n+1}(x_0 - r)$$

L'erreur à l'itération $n+1$ ne pourra donc diminuer, en valeur absolue, que si

$$\boldsymbol{-1 < g'(r) < 1 \iff |g'(r)| < 1}$$

En pratique:

- Si $|g'(r)| < 1$ et $g'(r) \neq 0$, la méthode converge vers r, r est dit **point fixe attractif**,
- Si $-1 < g'(r) < 0$, le signe de l'erreur alternera, les valeurs de x_n oscilleront de part et d'autre de r. Mais l'erreur diminue, et donc la méthode converge vers r,
- Si $|g'(r)| > 1$, l'erreur augmente à chaque itération, la méthode diverge, r est dit **point fixe répulsif**,
- Si $|g'(r)| = 1$, c'est un **cas indéterminé**, la convergence dépendra de x_0 et de g.

Attention !

La convergence est également assujettie au choix de la valeur initiale x_0. Un mauvais choix de x_0 peut résulter en un algorithme divergent même si $|g'(r)| < 1$.

$\rightarrow$ L'ensemble des valeurs x_0 pour lesquelles x_n tend vers r est appelé **bassin d'attraction**.

Plus $g'(r)$ est petit plus l'erreur diminue vite, et plus la convergence est rapide. On dit que $|g'(r)|$ est le **taux de convergence** de la méthode des points fixes.

Le cas limite est $g'(r) = 0$. Que se passe-t-il dans ce cas ?
Reprenons notre développement de l'erreur à l'itération $n+1$

$$e_{n+1} = \cancel{g'(r)e_n} + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + \ldots$$

Ainsi l'erreur à l'itération $n+1$ est cette fois proportionnelle à e_n^2. Dans ce cas la convergence dépendra du point de départ x_0. En effet

$$e_{n+1} \approx \frac{g''(r)}{2}e_n^2 \approx \frac{g''(r)^3}{8}e_{n-1}^4 \approx \ldots \approx e_0 \left(\frac{g''(r)}{2}{\color{red}e_0}\right)^{2^{n+1}-1}$$

De même, si $g''(r) = 0$, on aura $e_{n+1} \approx \frac{g'''(r)}{6}e_n^3$, et la convergence dépendra encore du point de départ x_0.

De manière générale, on introduit la notion de convergence à l'ordre p.

Définition (Ordre de convergence)

La méthode des points fixes converge à l'ordre p si

$$\boldsymbol{|e_{n+1}| \approx C\,|e_n|^p}$$

où C est une constante. Une convergence **d'ordre 1 est dite linéaire, d'ordre 2 quadratique, d'ordre 3 cubique**,...

En résumé:

- Si $\boldsymbol{|g'(r)| < 1}$ et $\boldsymbol{g'(r) \neq 0}$, la méthode des points fixes **converge à l'ordre 1 (linéaire)**,
- Si $\boldsymbol{|g'(r)| = 0}$ la convergence est **au moins d'ordre 2 (quadratique) mais dépend de $\boldsymbol{x_0}$**. L'ordre sera déterminé par l'ordre de la dérivée de g ne s'annulant pas (ordre 2 si $g''(r) \neq 0$, ...).

À noter que l'on souhaite en général l'ordre de convergence le plus élevé possible, pourquoi ?

Supposons $|e_0| = |x_0 - r| = 0.1$, alors on a pour une convergence linéaire

$$|e_1| = |x_1 - r| \approx C_{lin}|x_0 - r| = 0.1 \times C_{lin}$$

et pour une convergence quadratique

$$|e_1| = |x_1 - r| \approx C_{quad}|x_0 - r|^2 = 0.01 \times C_{quad}$$

$\rightarrow$ Comment mesurer l'ordre de convergence en pratique ?

Si l'on connaît r, on peut calculer e_{n+1} et e_n, et l'on doit avoir :

- Pour une convergence linéaire (ordre 1) :

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| \rightarrow |g'(r)| \neq 0$$

- Pour une convergence quadratique (ordre 2) :

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| \rightarrow |g'(r)| = 0 \text{ et } \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| \rightarrow \frac{|g''(r)|}{2} \neq 0$$

Comme en pratique r n'est pas connu, on utilise des approximations pour e_n. Deux méthodes :

- Si la méthode converge, on peut remplacer r par l'approximation obtenue à la dernière itération N de l'algorithme.

  $$x_N \approx r \text{ et donc } |e_n| \approx |x_n - x_N| = E_n$$

  Le calcul de l'erreur est donc fait *a posteriori*, une fois la valeur de x_N obtenue.

- Si l'on souhaite une approximation de l'erreur pendant les itérations de l'algorithme, on peut prendre l'approximation suivante, de moins bonne qualité

  $$E_n = x_{n+1} - x_n \approx e_n = x_n - r$$

Dans les deux cas, pour établir l'ordre de convergence, on regardera

$$\left|\frac{E_{n+1}}{E_n}\right| \to |g'(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{ convergence linéaire}$$
$$\left|\frac{E_{n+1}}{E_n}\right| \to |g'(r)| = 0, \ \left|\frac{E_{n+1}}{E_n^2}\right| \to \frac{|g''(r)|}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{ convergence quadratique}$$

Méthode des points fixes appliquée à la fonction $g(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$			
n	x_n	$\lvert E_n \rvert = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\left\lvert \frac{E_{n+1}}{E_n} \right\rvert$
0	$0,0000000$	$1,000\ 0000$	$0,6321 \times 10^{+0}$
1	$1,0000000$	$0,6321 \times 10^{+0}$	$0,5131$
2	$0,3678794$	$0,3243 \times 10^{+0}$	$0,5912$
3	$0,6922006$	$0,1917 \times 10^{+0}$	$0,5517$
4	$0,5004735$	$0,1058 \times 10^{+0}$	$0,5753$
5	$0,6062435$	$0,6085 \times 10^{-1}$	$0,5623$
6	$0,5453957$	$0,3422 \times 10^{-1}$	$0,5698$
7	$0,5796123$	$0,1950 \times 10^{-1}$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	$0,5669089$	$0,3673 \times 10^{-3}$	$0,5672$
15	$0,5672762$	$0,2083 \times 10^{-3}$	$0,5671$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
35	$0,5671433$	$0,2469 \times 10^{-8}$	$0,5671$

$\rightarrow$ **Convergence à l'ordre 1 (linéaire)**, $|g'(r)| \approx 0.5671$

À partir d'une méthode de point fixe convergeant à l'ordre 1, est-il possible d'obtenir une méthode convergeant à l'ordre 2 ? $\rightarrow$ **Algorithme de Steffenson**

Part de l'observation suivante

$$e_{n+1} \approx g'(r)e_n \text{ et } e_{n+2} \approx g'(r)e_{n+1} \Rightarrow \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_{n+2} - r}{x_{n+1} - r} \approx \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} \tag{1}$$

En isolant r dans (1) on obtient

$$r \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Cette formule étant numériquement instable, on lui préférera

$$r \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Cette dernière formule s'appelle **formule d'extrapolation de Aitken**. L'extrapolation de Aitken s'applique à n'importe quelle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, et permet d'en accélérer la convergence.

L'extrapolation de Aitken couplé à la méthode des points fixes nous donne **l'algorithme de Steffenson :**

- Point initial x_0 donné,
- Faire pour $n \geq 0$: $x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n)-x_n)^2}{g(g(x_n))-2g(x_n)+x_n}$.

Algorithme de Steffenson, pseudo-code `script_Steffenson.m`

Données :

- Une fonction g continue et un point de départ x_0
- Une tolérance d'arrêt ε_a, un nombre max d'itérations n_{max} et la précision machine ε_m.

Résultat : La variable x_{n+1} qui contiendra une approximation du point fixe r

tant que $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|+\varepsilon_m} > \varepsilon_a$ *et* $n \leq n_{max}$ **faire**

  $a = g(x_n); b = g(a)$;

  $x_{n+1} = x_n - \frac{(a-x_n)^2}{b-2a+x_n}$;

  $n = n + 1$;

fin

- L'algorithme de Steffenson revient à appliquer la méthode de points fixes à la fonction h définie par

$$h(x) = x - \frac{(g(x) - x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$

- Dans l'algorithme précédent, les variables a et b peuvent être vues comme des variables temporaires, écrasées à chaque itération,
- Si la méthode des points fixes est d'ordre 1 pour g, alors la méthode de Steffenson sera d'ordre 2. Si la convergence pour g est déjà d'ordre 2, alors on peut avoir avoir convergence d'ordre 3 !
- La méthode de Steffenson est un peu plus sensible aux instabilités numériques (soustractions dangereuses),
- La convergence va toujours dépendre du point de départ x_0.

$\rightarrow$ Est-il possible, sans accélérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'avoir une méthode d'ordre 2 ?

La **méthode de Newton** est une méthode **quadratique**, que l'on peut interpréter de différentes façons.

Première interprétation : Approche par correction (développement de Taylor)

Rappel: on cherche à résoudre $f(x) = 0$,

- On choisit un point de départ x_0
- On cherche une correction δ_0 sur le point x_0 telle que:

$$f(x_0 + \delta_0) = 0.$$

- A l'aide du développement de Taylor de f en x_0:

$$0 = f(x_0 + \delta_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta_0 + O(\delta_0^2),$$

  en supposant δ_0 petit, on néglige $O(\delta_0^2)$, et en supposant $f'(x_0) \neq 0$, on obtient la correction

$$\delta_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Prendre $x_1 = x_0 + \delta_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ et recommencer à partir de x_1.

Deuxième interprétation : Point fixe

On introduit la fonction:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors $g(x) = x$ implique $f(x) = 0$.

$\rightarrow$ La méthode de Newton est donc une **méthode de point fixe avec une fonction g particulière**.

On peut lui appliquer les résultats vus pour les points fixes:

- Convergence quadratique si $f'(r) \neq 0$ car:

$$g'(r) = \frac{f(r)f''(r)}{f'(r)^2} = 0$$

- Approximation du terme d'erreur (développement de Taylor) :

$$e_{n+1} \approx \frac{g''(r)}{2} e_n^2 = \frac{f''(r)}{2f'(r)} e_n^2$$

Remarque(s)

Si $f''(r) = 0$, la convergence est au moins cubique.

Algorithme de Newton :

- Point x_0 initial donné.
- Faire $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Algorithme de Newton, pseudo-code `script_Newton.m`

Données :

- Une fonction f deux fois différentiables et un point de départ x_0.
- Une tolérance d'arrêt ε_a et un nombre max d'itérations n_{max}
- la précision machine ε_m.

Résultat : la variable x_{n+1} qui contiendra une approximation de la racine r

tant que $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}| + \varepsilon_m} > \varepsilon_a$ *et* $n \leq n_{max}$ **faire**

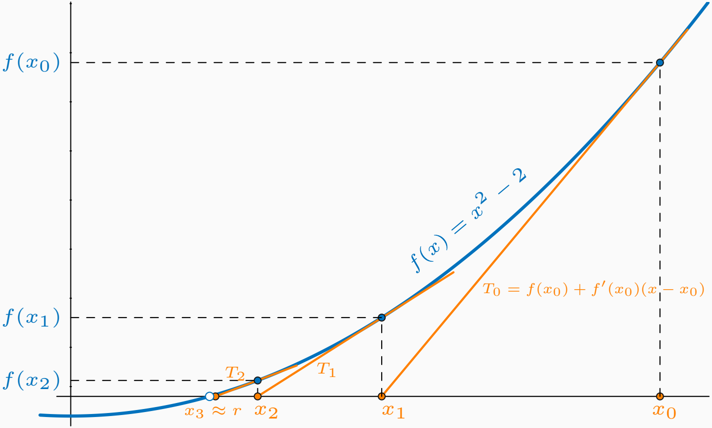
  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

  $n = n + 1$;

fin

Interprétation géométrique : $f(x_0 + \delta_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta_0 \to$ équation de la tangente à f en x_0.

- Partir d'un point $(x_0, f(x_0))$,
- Trouver l'intersection de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses $\to x_1$,
- Boucler en utilisant le nouveau point $(x_1, f(x_1))$.



En résumé, si f est deux fois dérivable avec $f'(r) \neq 0$ et si x_0 est assez près de la racine r, la méthode de Newton sera bien définie et **dans le pire des cas, convergente à l'ordre 2**.

Que se passe-t-il quand $f'(r) = 0$? $\rightarrow$ Souvent le signe d'une racine multiple

Définition (Multiplicité d'une racine)

Une racine r de f est de multiplicité m si on peut écrire f sous la forme:

$$f(x) = (x - r)^m h(x)$$

avec $\lim_{x \to r} h(x) = h(r) \neq 0$

Proposition (Caractérisation d'une racine multiple)

Une racine r de f est de multiplicité m si et seulement si:

$$f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0 \text{ et } f^{(m)} \neq 0.$$

Si r est une racine de multiplicité m la convergence devient linéaire ($g'(r) \neq 0$).

En effet, partant de

$$g'(r) = \frac{f(r)f''(r)}{f'(r)^2} \tag{2}$$

et en remplaçant f par $f(x) = (x-r)^m h(x)$ dans (2), on obtient pour g' (cf. p.76 du manuel pour développements complets)

$$\boldsymbol{g'(r)} = \frac{h(r)^2 m(m-1)}{m^2 h(r)^2} = \frac{m(m-1)}{m^2} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$$

- Pour $m = 1$, la racine est simple et on retrouve le résultat attendu, c'est-à-dire $g'(r) = 0$ et donc convergence quadratique,
- Pour $m \geq 2$, on a convergence linéaire,

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| \to 1 - \frac{1}{m}, \quad \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| \to \infty$$

Le taux de convergence est $1 - \frac{1}{m}$, plus m sera grand, plus la convergence sera lente.

Pour résumer :

- $f'(r) \neq 0$: racine simple, convergence au moins quadratique,
- $f'(r) = 0$: racine multiple, convergence linéaire.

Comment retrouver une convergence dans le cas d'une racine multiple ?

Pour retrouver une convergence quadratique, on peut appliquer la méthode de Newton à:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Il est possible de montrer (p.77 du manuel) que la racine multiple r de f est une racine simple de la fonction h.
L'algorithme de Newton devient alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

$\rightarrow$ nécessite le calcul d'une dérivée en plus !

Autres approches dans le cas de racines multiples :

- Si l'on connait la valeur de la multiplicité m (très rare en pratique), en peut prendre (ex. 12 p.89)

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)},$$

- Appliquer l'extrapolation de Aitken à Newton.

Remarque(s)

Le point de départ x_0 peut être loin de r et l'algorithme tout de même converger (avec un taux moindre que quadratique au début). En ce sens, la méthode de Newton est une méthode relativement robuste.

Conclusions:

- Méthode quadratique si $f'(r) \neq 0$ et f deux fois dérivables,
- Nécessite la dérivabilité de f et le calcul de f',
- La nature de f peut ralentir ou empêcher la convergence. En présence d'une racine multiple, la convergence devient linéaire. Les méthodes pour retrouver un taux quadratique peuvent nécessiter :
    - la connaissance de la multiplicité,
    - des calculs supplémentaires,
    - une plus grande régularité de la fonction.

L'algorithme de Newton nécessite d'être en mesure de calculer la dérivée de la fonction f

$\rightarrow$ Que faire si l'on ne connaît pas la dérivée f' ?

On introduit la méthode de la sécante, apparentée à la méthode de Newton, qui s'affranchit du calcul de dérivée. C'est une méthode à deux points.

On calcule la valeur du point x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Cela revient à changer dans la méthode de Newton $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, coefficient directeur de la sécante entre $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

- Ce n'est **pas une méthode de point fixe**.
- C'est une méthode à **deux pas**.
- Les deux points x_0 et x_1 pour l'initialisation devront être proches de r.
- **La convergence n'est pas quadratique**. Si $f'(r) \neq 0$ et $f''(r) \neq 0$, l'ordre de la méthode est de $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \rightarrow$ **méthode dite superlinéaire**.

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| \rightarrow 0, \quad \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| \rightarrow \infty$$

Algorithme de la sécante

- Points x_0 et x_1 initiaux donnés.
- Faire $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Algorithme de la sécante, pseudo-code `script_Secante.m`

Données :

- Une fonction f continue et deux points de départ x_0, x_1.
- Une tolérance d'arrêt ε_a et un nombre max d'itérations n_{max}
- la précision machine ε_m.

Résultat : la variable x_{n+1} qui contiendra une approximation de la racine r

tant que $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}| + \varepsilon_m} > \varepsilon_a$ *et* $n \leq n_{max}$ **faire**

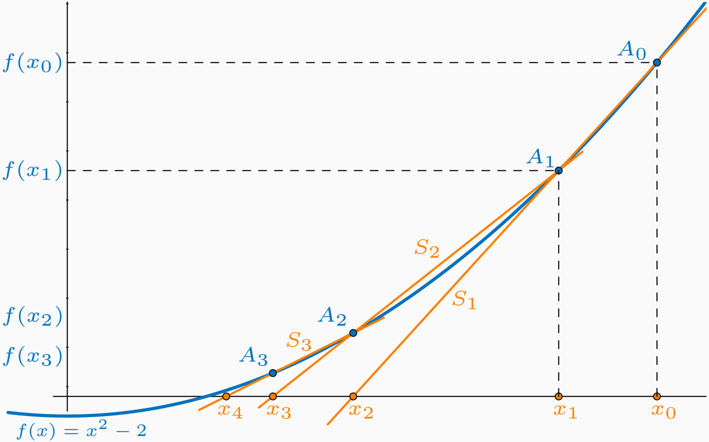
  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1})}$;

  $n = n + 1$;

fin

Interprétation géométrique :

- Partir de deux points $A_0 = (x_0, f(x_0))$ et $A_1 = (x_1, f(x_1))$,
- Trouver l'intersection de (A_0A_1) et l'axe des abscisses $\to x_2$,
- Boucler en utilisant les points $(x_2, f(x_2))$ et $(x_1, f(x_1))$.



Je dois être capable de :

- Maîtriser la bissection et son terme d'erreur,
- Distinguer une racine et un point fixe,
- Construire la fonction $g(x)$ dont le point fixe correspond à la racine de l'équation $f(x) = 0$,
- Caractériser un point fixe (répulsif, $\cdots$) et je comprends ce qu'est un bassin d'attraction,
- Établir la convergence ou non d'une méthode de point fixe,
- Comprendre et je sais déterminer l'ordre d'une méthode de point fixe,
- Utiliser l'extrapolation de Aitken,
- Connaître les particularités que constituent les méthodes de:
  - Steffenson (construction, utilisation et ordre de convergence à connaitre),
  - Newton (utilisation et ordre de la méthode à connaitre),
  - La sécante (utilisation et ordre de la méthode à connaitre),
- Saisir la notion de racine multiple et son impact sur la méthode de Newton,
- Comprendre que toutes ces méthodes sont sensibles à la position du point de départ x_0,
- Connaître une ou deux méthodes corrigeant la perte d'ordre dans le cas de Newton,
- Analyser le comportement d'une méthode en me basant sur un tableau de résultat: comportement normal ou anomalie imprévue, convergence, ordre.